Topologie Algébrique TD 4

28 Octobre 2011

4 Groupe Fondamental

Exercice 4.1 (Degré) Soit $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ une application continue. On choisit un point de base x de la source, et pose l'image $y = g(x)$ comme le point de base du but. De plus, on choisit les orientations de deux cercles, *i.e.* un générateur du groupe fondamental : $\sigma_1 \in \pi_1(\mathbb{S}^1, x)$ et $\sigma_2 \in \pi_1(\mathbb{S}^1, y)$. Le *degré* de g, noté $\deg(g)$, est par définition le nombre entier d satisfaisant $g_*(\sigma_1) = d\sigma_2$.

1. Vérifier que la définition de la notion de degré est indépendante du choix du point de base x.
2. Montrer que le degré est multiplicatif par rapport aux compositions : soient f, g deux applications continues composables, alors
$$\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g).$$
3. Montrer que le degré est un invariant homotopique, de plus, il est l'invariant homotopique *complet* : deux applications entre deux $\mathbb{S}^1$ sont homotopes si et seulement s'ils ont le même degré.
4. Si $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ est une application continue qui n'est pas surjective, montrer que $\deg(g) = 0$.
5. Donner une interprétation de la notion de degré en utilisant le relèvement $\widetilde{g} : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$.
6. Pour un point $x \in \mathbb{S}^1$, on note la cardinalité de son pré-image par
$$n(x) := |g^{-1}(x)|.$$
Montrer que
$$-\min_{x \in \mathbb{S}^1} n(x) \leq \deg(g) \leq \min_{x \in \mathbb{S}^1} n(x).$$
7. Si g est injectif, montrer que $\deg(g) = \pm 1$.

Exercice 4.2 (d'Alembert-Gauß) Montrer le théorème fondamental d'algèbre : tout polynôme non-constant f à coefficient dans $\mathbf{C}$ admet une racine. En conséquence, $\mathbf{C}$ est un corps algébriquement clos.

1. Rappeler la preuve par l'analyse complexe (Théorème de Liouville).

   On propose une preuve topologique. On voit $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ comme une application continue, et on va démontrer que 0 est dans l'image de f. Supposons par l'absurde que $0 \notin \mathbf{Im}(f)$, on utilise la même notation $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}^*$.

2. Considérer la famille d'application ($t \in \mathbf{R}_{\geq 0}$), définie par la composition suivante :
$$g_t : \mathbb{S}^1 \xrightarrow{i_t} \mathbf{C} \xrightarrow{f} \mathbf{C}^* \xrightarrow{r} \mathbb{S}^1,$$
où $i_t : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbf{C}$ est l'inclusion définie par $e^{i\theta} \mapsto te^{i\theta}$, et r est la rétraction $z \mapsto \frac{z}{|z|}$. Vérifier que g fournit une homotopie entre g_{t_1} et g_{t_2} pour tous $t_1, t_2 \in \mathbf{R}_{\geq 0}$;
3. Calculer le degré de g_0 ;
4. Montrer que le degré de g_M, pour $M > 0$ suffisamment grand, est égal au degré du polynôme f. (Indication intuitive : pour M très grand, l'effet des termes de degré plus bas dans f est 'négligeable'.)
5. Conclure.

Exercice 4.3 (Graphes) Un *graphe fini* (orienté) est la donnée de deux ensembles finis V, E munis de deux applications $s, b : E \to V$. On lui associe un espace topologique $G = G(V, E, s, b : E \to V)$ comme l'espace quotient $G := E \times I \sqcup V / \sim$ où la relation d'équivalence est engendrée par $e \times 0 \sim s(e), e \times 1 \sim b(e)$ pour tout $e \in E$. On appelle V l'ensemble des *sommets*, E l'ensemble des *arêtes*, et s, b sont des morphismes qui associent une arête son source et son but. Donner l'algorithme pour le groupe fondamental d'un graphe fini connexe.

Exercice 4.4 (Réalisations topologiques) Montrer que tout groupe peut être réalisé comme le groupe fondamental d'un espace topologique.

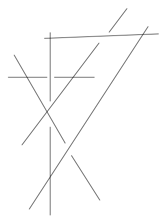
Exercice 4.5 (Surfaces de Riemann) Soit S une surface orientable compacte de genre g, soient $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}, Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$ deux ensembles disjoints de points distincts de S.

1. Rappeler le calcul du groupe fondamental de la surface de Riemann S.
2. Calculer le groupe fondamental de la surface de Riemann à n points enlevés $S - X$.
3. Calculer le groupe fondamental de l'espace quotient S/Y.
4. Finalement, calculer le groupe fondamental de $(S - X)/Y$.

Exercice 4.6 (Configurations de droites dans $\mathbf{R}^3$) On s'intéresse à classifier les configurations de plusieurs droites distinctes dans $\mathbf{R}^3$ à 'isotropie' près. Une stratégie fondamentale est d'étudier l'espace complémentaire. L'observation que le complémentaire est essentiellement de dimension 1 nous implique que le groupe fondamentale est un outil utile.

1. Calculer le groupe fondamental du complémentaire de la réunion de deux droites distinctes dans $\mathbf{R}^3$ (distinguer les cas où les droites sont disjointes, sécantes en un point).
2. Soit $n \geq 1$ un entier. Calculer le groupe fondamental du complémentaire de la réunion de n droites disjointes dans $\mathbf{R}^3$.
3. Soit $n \geq 1$ un entier. Si on a n droites distinctes passant par l'origine dans $\mathbf{R}^3$. Calculer le groupe fondamental du complémentaire.

4. Classifier toutes les configurations de trois droites distinctes dans $\mathbf{R}^3$. On pourrait utiliser le groupe fondamental, mais on remarque que dans ce cas de trois droites, les différentes configurations sont déjà distinguées par un invariant plus naïf, notamment le *nerf d'incidence*, *i.e.* le complexe simplicial donné par l'information d'incidence de droites.
5. Calculer le groupe fondamental du complémentaire de la configuration suivante :



Exercice 4.7 (Enlacement de deux cercles dans $\mathbf{R}^3$) Classifier les différentes relations topologiques possibles entre deux cercles plongés dans l'espace ambiant $\mathbf{R}^3$.

Exercice 4.8 (H-espaces) Un *H-espace* est par définition un espace topologique pointé (X, e) muni d'un morphisme(*i.e.* une application continue pointée) $\mu : X \times X \to X$, telle que les deux morphismes $\mu(e, \bullet) : X \to X$, $\mu(\bullet, e) : X \to X$ sont homotopes à l'identité de X relative à e. (X, e) est dit *associatif* (ou plus précisément associatif *homotopique*), si le diagramme suivant commute à homotopie près :

$$\begin{array}{ccc} X \times X \times X & \xrightarrow{\mu \times \mathrm{id}} & X \times X \\ {\scriptstyle \mathrm{id} \times \mu}\big\downarrow & & {\scriptstyle \mu}\big\downarrow \\ X \times X & \xrightarrow{\mu} & X \end{array}$$

1. Montrer qu'un groupe de Lie admet une structure naturelle de H-espace associatif.
2. On rappelle que *l'espace des lacets* d'un espace topologique pointé (Y, y) est l'ensemble des lacets en y dans Y, muni de la topologie compacte-ouverte, noté ΩY. Montrer que ΩY est un H-espace associatif.
3. Soit (Y, y) un espace topologique pointé, soient $f, g : [0, 1] \to Y$ deux lacets en y dans Y. On dispose deux 'produits' de f et g : d'une part, on a la composition des lacets $f \bullet g$, d'autre part, on peut considérer le lacet $f * g$ défini par $f * g(t) = \mu(f(t), g(t))$. Montrer que $f \bullet g$ et $f * g$ sont homotopes relativement aux extrémités.
4. On en déduit que le groupe fondamental d'un H-espace est abélien.

Exercice 4.9 (Théorème de Borsuk-Ulam) Le théorème de Borsuk-Ulam affirme que pour toute application continue $f : \mathbb{S}^n \to \mathbf{R}^n$, il existe toujours deux points antipodaux $x_1 = -x_2 \in \mathbb{S}^n$ avec le même image $f(x_1) = f(x_2) \in \mathbf{R}^n$. On se propose de le démontrer pour $n = 1$ et 2.

1. Montrer le théorème de Borsuk-Ulam en dimension 1 ;
2. Supposons $n = 2$, sous l'hypothèse de l'absurde que $f(x) \neq f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{S}^2$, construire une application $g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$ qui envoie l'antipode à l'antipode : $g(-x) = -g(x)$;
3. Restreignant g sur un grand cercle $\mathbb{S}^1$ de $\mathbb{S}^2$, montrer que le morphisme $g|_{\mathbb{S}^1} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ n'est pas homotope au morphisme constant ;
4. Conclure.

Montrer que l'assertion *géographique* suivante : à chaque instant, il toujours existe deux points antipodaux de la Terre ayant exactement la même température et la même pression atmosphérique.

Exercice 4.10 Soient A_1, A_2, A_3 trois sous-espaces fermés de $\mathbb{S}^2$, tels que l'union recouvre $\mathbb{S}^2$. Montrer qu'il existe un A_i qui contient une paire de points antipodaux.